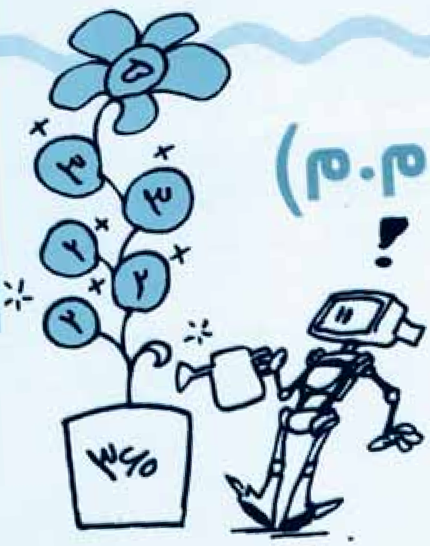
سپیده چمن‌آرا
معلم ریاضی منطقه‌ی ۲ تهران

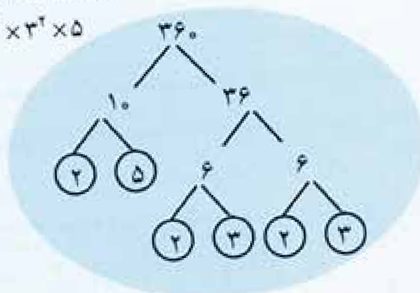
رابطه‌ی (ب.م.م) و (ک.م.م) با نمودار درختی



قسمت دوم

با نمودار درختی عددها آشنا شده‌اید. می‌دانید که به کمک این نمودار می‌توانیم بفهمیم مقسوم‌علیه‌های اول عدد مورد نظر ما، چه عددهایی هستند. هم‌چنین می‌بینیم که عدد ما، از حاصل ضرب چه عددهای اولی به‌دست می‌آید. مثلاً اگر عدد ۳۶۰ را تجزیه‌ی درختی کنیم (شکل ۱)، می‌فهمیم:

$$۳۶۰ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۳ \times ۵$$
$$= ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵$$



شکل ۱. نمودار درختی عدد ۳۶۰

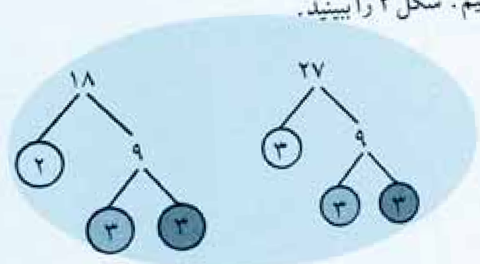
در ادامه‌ی این مقاله قصد داریم درستی یکی از روابط ریاضی که توسط آن، کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد (ک.م.م) به وسیله‌ی بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن دو عدد به دست می‌آید، را با کمک نمودار درختی بررسی کنیم. این رابطه همان رابطه‌ای است که در کتاب ریاضی اول راهنمایی معرفی شده است؛ یعنی:

$$\text{ک.م.م دو عدد} = \frac{\text{حاصل ضرب آن دو عدد}}{\text{ب.م.م آن دو عدد}}$$

نخست با هم ببینیم که چگونه با استفاده از نمودار درختی اعداد، می‌توان بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها را پیدا کرد. با عددهای کوچکی مثل ۱۸ و ۲۷ شروع می‌کنیم. هم به صورت ذهنی و هم با استفاده از سایر راه‌حل‌هایی که یاد گرفته‌ایم (مثلِ نوشتن مجموعه‌های مقسوم‌علیه‌های ۱۸ و ۲۷، یا تقسیم متوالی، و یا روش نردبانی) می‌بینیم که بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک ۱۸ و ۲۷، عدد ۹ است؛ یعنی:

$$۱۸ \prod ۲۷ = ۹$$

حال بیایید نمودار درختی این عددها را با دقت بیش‌تری بررسی کنیم. شکل ۲ را ببینید.

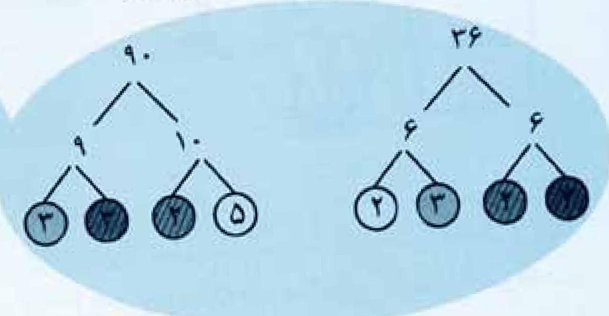


شکل ۲. نمودارهای درختی اعداد ۱۸ و ۲۷ و میوه‌های شبیه به‌هم در هر دو نمودار.

همان‌طور که در شکل ۲ می‌بینید، در نمودار هر دو عدد، میوه‌هایی وجود دارند که روی آن‌ها عدد ۳ نوشته شده است. پس ۳، مقسوم‌علیه هر دو عدد، یعنی مقسوم‌علیه مشترک اعداد ۱۸ و ۲۷ است. اما ما به دنبال بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد هستیم. بنابراین همه‌ی میوه‌هایی را که در نمودارهای درختی هر دو عدد مشترک هستند، می‌یابیم و آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم تا بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک ۱۸ و ۲۷ پیدا شود.

همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌کنید، هر دو نمودار، دو تا میوه‌ی ۳ مثل هم دارند. (نمودار ۲۷، یک ۳ دیگر هم دارد که نمودار ۱۸ ندارد. پس سومین ۳ در نمودار ۲۷، در هر دو نمودار، مشترک نیست.) بنابراین ۹=۳×۳، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک ۱۸ و ۲۷ است؛ یعنی همان عددی که از راه‌های دیگر نیز پیدا کردیم.

حال دو عدد دیگر در نظر می‌گیریم و همین مراحل را برای آن‌ها تکرار می‌کنیم: عددهای ۹۰ و ۳۶ (شکل ۳).



شکل ۳. نمودارهای درختی اعداد ۹۰ و ۳۶ و میوه‌های مشترک در هر دو نمودار.

میوه‌های مشترک در دو نمودار درختی عددهای ۹۰ و ۳۶، دو تا ۳ و یک ۲ است؛ پس:

۹۰∏۳۶ = ۳×۳×۲ = ۱۸

از روش تقسیم متوالی، درستی عدد به دست آمده را بررسی می‌کنیم:

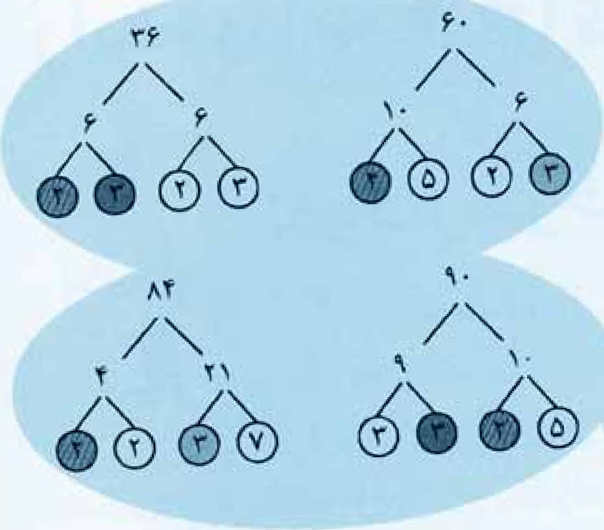
۹۰	۳۶
۷۲	۲
۱۸	

۳۶	۱۸
۳۶	۲
۰۰	

ب.م.م

استفاده از میوه‌های مشترک در نمودارهای درختی اعداد این مزیت را دارد که می‌توان آن را برای بیش از دو عدد نیز به‌کار برد؛ یعنی بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک سه یا چهار یا پنج عدد یا حتی بیش‌تر را نیز می‌توان به سرعت پیدا کرد. درحالی‌که روش تقسیم متوالی یا روش نردبانی، این قابلیت را ندارند و فقط برای یافتن ب.م.م دو عدد قابل استفاده هستند. از طرف دیگر، استفاده از مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌ها برای یافتن بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک چند عدد، روشی بسیار زمان‌گیر و پرخطاست. (چرا که ممکن است بعضی از مقسوم‌علیه‌های عددهای مورد نظرمان را جا بیندازیم!)

بیایید با هم بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک چهار عدد ۳۶، ۶۰، ۸۴ و ۹۰ را با استفاده از نمودارهای درختی آن‌ها پیدا کنیم



شکل ۴. نمودارهای درختی عددهای ۳۶، ۶۰، ۸۴ و ۹۰ و میوه‌های مشترک در هر چهار نمودار.

با توجه به شکل، در هر چهار نمودار، یک ۲ و یک ۳ مثل هم است. پس:

۳۶∏۶۰∏۸۴∏۹۰ = ۲×۳ = ۶

اینک نوبت آن است که ببینیم از روی نمودار درختی اعداد، کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها چگونه به‌دست می‌آید؟ باز هم عددهای ۱۸ و ۲۷ را در نظر می‌گیریم (شکل ۲).

همیشه حاصل‌ضرب دو عدد، مضرب مشترکی آن دو عدد است؛ زیرا بر هر دوی آن‌ها بخش‌پذیر است:

۱۸×۲۷=۴۸۶

۴۸۶÷۱۸=۲۷

۴۸۶÷۲۷=۱۸

استفاده از میوه‌های مشترک در نمودارهای درختی اعداد این مزیت را دارد که می‌توان آن را برای بیش از دو عدد نیز به کار برد؛ یعنی بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک سه یا چهار یا پنج عدد یا حتی بیش‌تر را نیز می‌توان به سرعت پیدا کرد

اما این عدد، الزاماً کوچک‌ترین مضرب مشترک آن دو عدد نیست. مثلاً در مورد ۱۸ و ۲۷، اگر حاصل ضرب ۲۷×۱۸ را با استفاده از تجزیه‌ی درختی این دو عدد باز کنیم و با دقت به آن بنگریم، خواهیم دید:

$$۱۸\times۲۷ = \underbrace{۲\times۳\times۳}_{۱۸}\times\underbrace{۳\times۳\times۳}_{۲۷}$$

$$۱۶۲ = \underbrace{۲\times۳\times\rlap{$\overbrace{}^{۲۷}$}۳}_{۱۸}\times۳\times۳$$

$$۵۴ = \underbrace{۲\times\rlap{$\overbrace{}^{۲۷}$}۳\times۳}_{۱۸}\times۳$$

که مثلاً با حذف یک ۳ از این حاصل ضرب، عدد کوچک‌تری به‌دست می‌آید که ثلث ۴۸۶ است، ولی هم‌چنان هم مضرب ۱۸ است و هم مضرب ۲۷؛ زیرا در دل خود، هم ۳×۳×۲ (یعنی ۱۸) را دارد و هم ۳×۳×۳ (یعنی ۲۷) را.

اما این عدد، هنوز بزرگ است و می‌توان مضرب مشترک کوچک‌تری از ۱۶۲، برای ۱۸ و ۲۷ پیدا کرد. اگر گفتید این بار باید چه تغییری در ۱۶۲ بدهیم؟ بله درست است: باز هم یک ۳ دیگر از حاصل ضرب مربوط به ۱۶۲ می‌کنیم. حالا عدد ۵۴ که ثلث ۱۶۲ است به دست می‌آید. ۵۴ نیز در دل خود هم ۳×۳×۲ (یعنی ۱۸) را دارد و هم ۳×۳×۳ (یعنی ۲۷) را.

پس ۵۴ هنوز هم مضرب مشترک ۱۸ و ۲۷ و درواقع کوچک‌ترین مضرب مشترک ۱۸ و ۲۷ است؛ زیرا با حذف هریک از عامل‌ها از حاصل ضرب ۳×۳×۳×۲=۵۴، عدد حاصل یا بر ۱۸ بخش‌پذیر نیست (اگر ۲ را حذف کنیم) یا بر ۲۷ بخش‌پذیر نیست (اگر ۳ را حذف کنیم) یا بر هیچ کدام! (اگر بیش از یک عدد حذف کنیم). پس:

$$۱۸ \coprod ۲۷ = ۲\times۳\times۳\times۳ = ۵۴$$

خب، یک بار دیگر به آن چه انجام دادیم، مثل یک فیلم با سرعت آهسته[1] می‌نگریم:

حاصل ضرب دو عدد ۱۸ و ۲۷ را به‌دست آوردیم:

$$۱۸\times۲۷=۲\times۳\times۳\times۳\times۳\times۳$$

این عدد، کوچک‌ترین مضرب مشترک ۱۸ و ۲۷ نیست؛ زیرا می‌توان عددهای کوچک‌تری یافت که مضرب مشترک این دو عدد باشند.

برای یافتن کوچک‌ترین مضرب مشترک ۱۸ و ۲۷، از حاصل ضرب آن دو، تا جایی که بتوانیم، عددهای اضافه را حذف می‌کنیم، به‌طوری که عددهای باقی‌مانده هنوز ۳×۳×۲ و ۳×۳×۳ را در دل خود داشته باشند. پس ۳×۳ را حذف می‌کنیم.

$$\frac{۱۸\times۲۷}{۹}=\frac{۲\times۳\times۳\times۳\times۳\times۳}{۳\times۳}$$
$$=۲\times۳\times۳\times۳$$
$$=۵۴$$

این عدد حتماً ک.م.م ۱۸ و ۲۷ است، زیرا در دل خود هم ۱۸ را دارد و هم ۲۷ را و ضمناً حذف هریک از اعداد باقی‌مانده از این حاصل ضرب موجب می‌شود عدد جدید یا بر ۱۸ بخش‌پذیر نباشد یا بر ۲۷. پس مضرب مشترک کوچک‌تری برای ۱۸ و ۲۷ نمی‌توان یافت!

یک لحظه صبر کنید!

سومین تصویر فیلم را دوباره نگاه کنید: حاصل ضرب ۱۸ و ۲۷ را بر ۳×۳، یعنی ۹ تقسیم کردیم. این ۳×۳ چه بود؟! خوب فکر کنید! بله درست است! این‌ها میوه‌های مشترک در دو نمودار درختی ۱۸ و ۲۷ بودند؛ یعنی ب.م.م ۱۸ و ۲۷. مثل این‌که به هدفمان- یعنی بررسی درستی رابطه‌ی- نزدیک شدیم. حتی بیش از آن، به نوعی دلیل درستی این رابطه را مشاهده کردیم!

$$\text{ک.م.م} = \frac{\text{حاصل ضرب}}{\text{ب.م.م}}$$

پس فیلم را با یک تصویر دیگر ادامه می‌دهیم و «پایان» فیلم را پس از آن می گذاریم:

اگر بخواهیم ک.م.م دو عدد را بیابیم، نخست می‌توانیم آن دو عدد را در هم ضرب کنیم تا یک مضرب مشترک از آن دو عدد به دست آید. ولی این مضرب، همیشه ک.م.م نیست. حال این حاصل ضرب را تا حد امکان کوچک می‌کنیم، به‌طوری که هنوز در دل خود، عددهای مورد نظر ما را داشته باشد. برای این کار همه‌ی عامل‌های مشترک در دو عدد را می‌یابیم (یعنی ب.م.م آن دو عدد را) و از حاصل ضرب، حذف می‌کنیم؛ پس:

$$\text{ک.م.م} = \frac{\text{حاصل ضرب}}{\text{ب.م.م}}$$

بیایید این موضوع را روی اعداد مثال بعدی‌مان، یعنی ۳۶ و ۹۰ نیز بررسی کنیم (شکل ۳).

قسمت مشترک در تجزیه‌ی دو عدد

$$90\times 36=\underbrace{3\times 3\times 2\times 5}_{90}\times\underbrace{3\times 3\times 2\times 2}_{36}$$

حال با یک‌بار حذف قسمت مشترک، یعنی ۲×۳×۳=۱۸ از حاصل ضرب فوق، عددی حاصل می‌شود که هنوز هم بر ۹۰ بخش‌پذیر است و هم بر ۳۶، ولی دیگر نمی‌توان عددی را از آن حذف کرد:

$$\underbrace{5\times \cancelto{36}{3\times 3\times 2}\times 2}_{90}$$

یعنی:

$$90 \amalg 36=\frac{90\times 36}{90 \prod 36}=5\times 3\times 3\times 2\times 2=180$$

و اما آخرین کلام. این مقاله را با یک پرسش خاتمه می‌دهم:

«آیا می‌توان با استفاده از نمودار درختی اعداد و تجزیه‌ی آن‌ها به عددهای اول، ک.م.م سه یا چهار یا تعداد بیشتری از اعداد را به‌دست آورد؟»

روی آن فکر کنید و منتظر پاسخ آن در شماره‌ی آینده باشید

پی‌نوشت

1. Slow Motion